Bài 6: PHÉP VỊ TỰ

1) Định nghĩa:

+ Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k.

+ Kí hiệu: $V_{(O,k)}$: Phép vị tự tâm O, tỉ số k.

2) Các tính chất của phép vị tự:

***Định lý 1:** *Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì:* $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ *và* $M'N' = |k|MN$.

Chứng minh:

Gọi O là tâm của phép vị tự.

Ta có: $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$

$V_{(O,k)}(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$

Do đó:

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{ON} - k\,\overrightarrow{OM} = k\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right) = k\,\overrightarrow{MN}$

$\Longrightarrow M'N' = k\,|MN|$.

***Định lí 2:** *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.*

Chứng minh:

Giả sử A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Khi đó ta có: $\overrightarrow{BA} = m\,\overrightarrow{BC}$ với $m < 0$.

Phép vị tự tỉ số k biến A, B, C lần lượt thành A', B', C'. Khi đó theo định lí 1, ta có :

$\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA} = k\,(m\overrightarrow{BC}) = m\,(k\overrightarrow{BC}) = m\overrightarrow{B'C'}$ (do $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$)

Do đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng và B' nằm giữa A' và C'.

***Hệ quả:** *Phép vị tự tỉ số k:*

a) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.

b) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số là $|k|$.

c) Biến góc thành góc bằng nó.

?1/25/SGK:

a) *Những đường thẳng nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số* $k \neq 1$?

b) *Những đường tròn nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số* $k \neq 1$?

Giải:

a) Đường thẳng đi qua tâm vị tự.

b) + Nếu k = -1 thì mọi đường tròn có tâm trùng với tâm vị tự đều biến thành chính nó.

+ Nếu k $\neq \pm 1$ thì không có đường tròn nào biến thành chính nó.

3) Ảnh của đường tròn qua phép vị tự:

***Định lí 3:** Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|$R.

Chứng minh:

+ Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số k và (I ; R) là đường tròn đã cho.

+ Gọi I' là ảnh của I qua $V_{(O,k)}$ và M' là ảnh của M qua $V_{(O,k)}$

Theo định lý 1, ta có: $I'M' = |k|\, IM$

Khi đó: $IM = R \Leftrightarrow I'M' = |k|.R$ hay M' thuộc (I', R') với $R' = |k|.R$

Tóm lại : $\boldsymbol{V_{(O,k)}(I;R) = (I';R')}$ **thì** $\begin{cases} \boldsymbol{R' = |k|.R} \\ \boldsymbol{\overrightarrow{OI'} = k.\overrightarrow{OI}} \end{cases}$

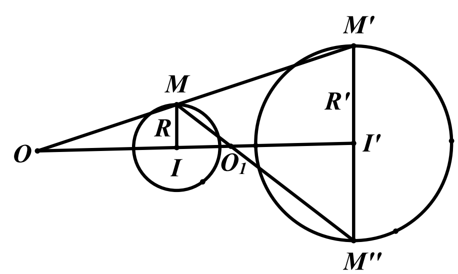
4) **<u>Tâm vị tự của hai đường tròn:</u>**

<u>Bài toán:</u> Cho hai đường tròn (I ; R) và (I’ ; R’) phân biệt. Hãy tìm các phép vị tự biến đường tròn (I ; R) thành đường tròn (I’ ; R’).

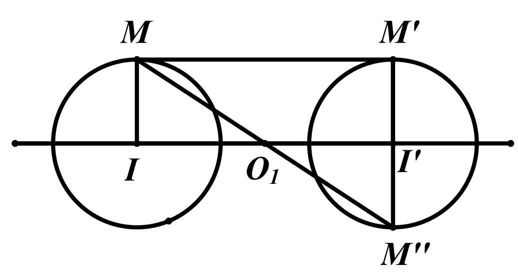
Cho hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$. Có ba trường hợp xảy ra:

*Nếu I ≡ I’ và R≠ R’ thì ta có hai phép vị tự: phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{-R'}{R}$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I’; R’).

*Nếu I ≠ I’ và $R \neq R'$ thì ta có hai phép vị tự: phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = \frac{-R'}{R}$ sẽ biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I’; R’). Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.



*Nếu I ≠ I’ và $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ thì ta có một phép vị tự, đó là phép vị tự tâm O_1 tỉ số $\mathrm{k} = -1$ (O_1là trung điểm của II') biến đường tròn (I; R) thành đường tròn (I’; R’). Đó chính là phép đối xứng tâm O_1.



5) **Ứng dụng của phép vị tự:**

Bài toán : Cho tam giác ABC có hai đỉnh B và C cố định, còn đỉnh A chạy trên đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải:

Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định.

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi: $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Như vậy phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G.

Vậy khi A chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích điểm G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn (O'; R') mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$.

6) **Một vài ví dụ:**

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng d có phương trình 3x + 2y – 6 = 0. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số k = -2.*

Giải

Cách 1: Lấy $M(x; y) \in d$.

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua $V_{(0;-2)}$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' \\ y = -\frac{1}{2}y' \end{cases}$

Ta có: $M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3.\left(-\frac{1}{2}x'\right) + 2.\left(-\frac{1}{2}y'\right) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x' + 2y' + 12 = 0.$$

Vậy ảnh của d qua phép vị tự trên chính là đường thẳng $(d'): 3x + 2y + 12 = 0$.

Cách 2: Do $d'//d$ hoặc $d \equiv d'$ nên phương trình (d') có dạng: $3x + 2y + c = 0$.

Lấy $M(0; 3) \in (d)$.

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự tâm O, tỉ số $k = -2$.

Ta có: $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x_M = -2.0 = 0 \\ y' = -2.y_M = -2.3 = -6 \end{cases}$.

Suy ra: $M(0; -6)$.

Vì $M' \in (d')$ nên: $2.(-6) + c = 0 \Leftrightarrow c = 12$.

Vậy ảnh của d qua phép vị tự trên chính là đường thẳng $(d'): 3x + 2y + 12 = 0$.

<u>Ví dụ 2:</u> *Trong mp tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(-2; 3)$, tỉ số $k = 2$.*

<u>Giải</u>

Đường tròn (C) có tâm $J(2; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi $J'(x'; y')$ là ảnh của J qua phép vị tự tâm I, tỉ số $k = 2$.

Khi đó: $\overrightarrow{IJ'} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2 = 2(2+2) \\ y' - 3 = 2(-1-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ y' = -5 \end{cases}$.

$\Rightarrow J'(6; -5)$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua $V_{(I,2)}$ thì (C') có tâm J' và bán kính $R' = 2R = 4$.

Vậy $(C'): (x-6)^2 + (y+5)^2 = 16$.

<u>Ví dụ 3:</u>

Cho hai đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ và (C'): $(x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

<u>Giải:</u>

Đường tròn (C) có tâm I(2 ; 1), bán kính R = 2

Đường tròn (C') có tâm I'(8 ; 4), bán kính R' = 4.

Do $I \neq I'$ và $R \neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(K;-2)}$ biến (C) thành (C').

Gọi J(x ; y), K(x'; y')

+ Với k = 2, khi đó $\overrightarrow{JI'} = 2\overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x = 2(2-x) \\ 4 - y = 2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Longrightarrow J(-4;\ -2)$.

+ Với k = -2, khi đó $\overrightarrow{KI'} = 2\overrightarrow{KI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x' = -2(2-x') \\ 4 - y' = -2(1-y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 2 \end{cases} \Longrightarrow K(4; 2)$.

Vậy ta có tâm vị tự ngoài là $J(-4;\ -2)$ và tâm vị tự trong là $K(4; 2)$.

Biên soạn: Bùi Thị Cẩm An.